Радослав Милошевић[*]
Ванредни професор
Катедра за математику и
рачунарство
Филозофски факултет Пале
Универзитет Источно Сарајево

УДК 510.25
DOI 10.7251/PM1701009M
Прегледни рад

НЕКЕ НОВИЈЕ НЕКЛАСИЧНЕ ФОРМАЛНЕ ЛОГИКЕ

Апстракт: *Формална логика се понекад назива и метаматематика, а односи се на савремену математичку логику. Поред класичне математичке логике, развило се низ новијих формалних логика. Наиме, Хилбертови проблеми били су узрок да се развију нове математичке теорије. Тако је нови развој математике понудио неколико програма реконструкције математике и логичког расуђивања уопште. Посебно се истичу смјерови, као што су : Раселов логицизам, Хилбертов формализам, Брауеров интуиционизам и Марковљев конструктивизам. На тим програмима настају нове формалне логике, међу којима су поливалентне интуиционистичке и конструктивистичке логике, што ће бити предмет овог рада.*

Кључне ријечи: *поливалентна, интуиционистичка, конструктивистичка, логика*

УВОД

Нагли развој математике довео је до њеног значаја за свакодневни живот човјека и њене све веће примјене не само у природним него и у друштвеним наукама. Такав се напредак мора нечим и платити. Преглед над математиком као цјелином и поглед на њу као цјелину све више измичу. Још почетком прошлог вијека било је могуће у једном опсежнијем погледу изнијети попис најважнијих проблема и то тако да они по својој формулацији буду приступачни сваком компетентном математичару. Године 1900. Давид Хилберт (David Hilbert) је на Међународном конгресу математичара у Паризу предложио своја 23 проблема у којима је био сажет највећи дио тадашњих тражења. Захваљујући тим проблемима развиле су се нове математичке теорије.

Новији развој математике показао је да класичне методе логичког расуђивања којима се много вијекова служило, нису у оном смислу недискутабилне, као што се то некад мислило. Појава антиномија или парадокса у теорији скупова посебно је показала да се о бесконачним

[*] radoslav_milosevic@yahoo.com

скуповима не смије увијек расуђивати на основу правила класичне логике апстраховане од операција са коначним скуповима. Као посљедица настале ситуације развијено је неколико програма реконструкције математике и математичко-логичког расуђивања уопште.

Логистички смјер полази од концепције да је математика грана логике и да је као такву треба развијати. Детаљније, овдје није могуће улазити у тај програм, но треба споменути да једна од његових кључних тачака, тзв. аксиом редуцибилитета и није издржао критике.

Други, *формалистички смјер* како га је поставио Д. Хилберт – одваја формалну математичку теорију која се изграђује од садржајне тзв. *метатеорије* (метаматематике) помоћу које се она прва теорија изграђује. Крајњи циљ Хилбертовог програма, доказ неконтрадикторности овако фундиране математике, која би (уз одговарајућу реинтерпретацију) обухватила класичну, није успио и, уз инсистирање на стриктној финитности (коначности) математике, како ју је Хилберт захтијевао, нема изгледа за потпуни успјех. Међутим, упркос томе, досадашњи резултати овог и сродних програма ванредно су богати и остаће трајна својина математике.

Трећи од великих програма реконструкције тзв. *интуционизам*, како га је схватио Брауер (Luitzen Egbertus Jan Brower) и како су га даље развијали Аренд Хејтинг(Arend Heyting), Бет (Evert Willem Beth), Клини (Stephan Cole Kleene) и други, узима насупрот логицизму да је логика грана математике и у том смислу генетички секундарна, а примарне су одређене мисаоне конструкције математичког карактера. Интуиционистички, легитиман је само онај математички објект који се, бар у начелу, може ефективно конструисати са коначно много елементарних корака таквих конструкција. Интуционистичка интерпретација негације такође се радикално разликује од класичне; доказати тврдњу non-A тј. побити тврдњу A, значи сада претпостављени конструктивни доказ од A (интуиционистички легитимно) продужити тако да доведе до неке интуиционистичке контрадикције, нпр. $0=1$. Одатле двострука негације од A није једнака са афирмацијом од A: афирмација додуше повлачи као посљедицу и двоструку негацију, али обрнуто не мора бити. Интуиционистички, ни *tertium non datur* није више опште прихватљив принцип закључивања. Такође, и негирање генералних изрека мијења значење: води ли претпоставка да у неком скупу нема објеката са особином P на контрадикцију, то још само по себи не оправдава закључак да у њему постоји објекат са особином P.

Интуиционистичка критика (а и неки други разлози) довели су и до развоја тзв. *теорија о конструктибилном*, у којима се испитују конструктибилни математички објекти, али не обавезно конструктибилним средствима. Ове теорије, иако у неким аспектима сродне интуиционизму, ипак нису увијек интуиционистички легитимне теорије. Поклапање екстензије конструктибилног у неколико оваквих теорија развијених на основу врло различитих идеја (нпр. у теорији алгоритама по Маркову (Андрей Андреевич Марков), теорији рекурзивних функција и теорији Тјуринговых (Alan Mathison Turing) машина чини се да указује на то да су одговарајућим појмовима, нпр. израчунљиве функције, одлучивог предиката, енумерабилног скупа итд., математички успјешно прецизирани неки од најважнијих интуитивних математичких појмова.

Данас се под укупним називом (логичких) основа математике подразумјева, поред логицизма, формализма и *интуиционизма,* још читав низ даљих математичко-логичких теорија: као што су тзв. *поливалентне* или *вишевалентне логике* гдје за вриједност истинитости« тврдње постоји више од двије могућности, „истинита" или „лажна" са пребројиво и непребројиво бесконачно много вриједности истинитости, те разне *модалне логике*, затим *пробабилистичке логике,* па *ултраинтуиционистичке логике*.

ПОЛИВАЛЕНТНЕ ЛОГИКЕ

Све досад разматране логике и формализације математичких теорија биле су „класичне" у смислу да су биле „двовалентне": искази су у њима могли имати само *двије* вриједности истинитости – било да су истинити или лажни.

Изграђују се и „некласичне" вишевалентне логике, у којима искази могу имати више од двије вриједности истинитости. Неке од тих логика имају и примјене не само у математици самој, и нпр. у техници, већ и у неким другим наукама. Посебно се нпр. радило на примјени тровалентне и четворовалентне логике у квантној механици. Испитивања такве врсте, међутим, не могу се још сматрати окончаним. Иначе, вишевалентне логике могу се изградити не само за било који коначни број могућих вриједности истинитости исказа, већ и за пребројиво бесконачно много или континуум бесконачно много могућих вриједности истинитости за исказе. (Посебно су посљедње у уској вези с тзв. „вјероватносним" логикама.) За дати k може се развити више *k – валентних логика*, већ према томе како се дефинишу „таблице тока вриједности истинитости" за поједине операције алгебре исказа таквих логика; при том и опет мотивација није обавезно искључиво логичка и математичка.

Нпр. за тровалентну логику можемо трећу (поред $\top$ и $\perp$) вриједност истинитости за исказе интерпретирати као „неодређен", „непознат", "произвољан" и сл. Означимо ли је са *N,* добијамо нпр. – на нивоу *алгебре* исказа – међу осталим ове тровалентне логике:

Лукашијевичева:

$\tau(\neg A)$

τA	$\top$	N	$\perp$
$\tau(\neg A)$	$\perp$	N	$\top$

$\tau(A \vee B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
N	$\top$	N	N
$\perp$	$\top$	N	$\perp$

$\tau(A \wedge B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	N	$\perp$
N	N	N	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\perp$

$\tau(A \Rightarrow B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	N	$\perp$
N	$\top$	$\top$	N
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

$\tau(A \Leftrightarrow B)$

τA \ τB	$\top$	N	$\perp$
$\top$	$\top$	N	$\perp$
N	N	$\top$	N
$\perp$	$\perp$	N	$\top$

Клинијева: Као споменута, Лукашијевичева осим што је сад $N \Rightarrow N = N$, $N \Leftrightarrow N = N$.

Уопште се за коначни k уз вриједности истинитости

$\top = k - 1, k - 2, \; . \; . \; . \; , 2, 1, 0 = \bot$ негација, конјункција и дисјункција природно дефинишу са

$\tau\,(\neg\, A) = k - 1 - \tau\, A$, $\tau\,(A \wedge B) = \text{mиn}\,(\tau\, A, \tau\, B)$, $\tau\,(A \vee B) = \max\,(\tau\, A, \tau\, B)$.

Од осталих „некласичних” (математичких) логика – осим интуиционистичке, о којој ће бити ријечи споменимо само оне по имену тзв. *модалне* логике (које „узимају у обзир” модалитете, могућности), нпр. „можда“ логике *стриктне импликације*, па *логике са више* (различитих вриједности) *негација* попис ни издалека није завршен.

ИНТУИЦИОНИСТИЧКА ЛОГИКА

Од досада разматраних (математичких) логика радикално се и дубоко – а бар у начелу и „непомирљиво” – разликује тзв. *интуиционистичка* логика. Грубо и специфично речено, с гледишта интуициониста формализам у математици није друго до „игра” са симболима; с гледишта формалиста интуиционизам представља непотребно и недопустиво сакаћење и осиромашење те компликовање (такве „резидуалне”) математике. Сам назив „интуиционизам” није срећно одабран, и то је допринијело многим неспоразумима – но чини се да ће, такав какав јест, и остати.

Између интуициониста и формалиста (којима је назив такође приредио доста неспоразума, нарочито од математички недовољно компететних филозофа, али и од неких математичара) могућ је и користан „дијалог”; међутим, резултати таквог дијалога чини се да ће ипак остати више – мање ограничен на међусобну „реинтерпретацију”, тј. на „интуиционизам” тумачен и вреднован с формалистичког гледишта и на „формализам” тумачен и вреднован с интуиционистичког гледишта.

Још се дубље интуиционизам разликује од тзв. *логицизма* у математици, како га је зацртао Фреге (G. Frege) и затим Расел (Bertrand Russell) и Уајтхед (A. N. Whitenhead) у њиховом монументалном дјелу *Principia mathemetica*, а касније даље развијао код других математичара и филозофа. У основи, програм логицизма састоји се у томе да се на дефинитивно осигураној логици изграђује математика – у крајњој линији као *грана логике.* (Детаљније о логицизму овдје неће бити ријечи; тзв. *аксиом редуцибилитета*, с којим он – као цјелина – у извјесном смислу прихвата и одбацује је, чини се да није оправдан). Према интуиционистичким схватањима, обрнуто, математика (тј. математичко расуђивање, математичке конструкције „у нашем поимању, у мислима”) јесу примарне, а „логичке законитости” секундарне, апстраховање од тог „конкретног” рада (у мислима) с „конкретним” (мисаоним) математичким објектима. Другим ријечима, математика је по интуиционистима основа логике, а не обрнуто.

Док се интуиционисти и формалисти, бар ови посљедњи који су на терену метаматематике (у Хилбертовом, стриктно финитном смислу), у много чему ипак слажу, између интуициониста и логициста заједнички је језик још знатно оскуднији.

Основна интуиционистичка теза јесте могућност (бар начелно) ефективне конструкције. Класични математички искази о егзистенцији одређених математичких објеката, који уједно не дају и могућност њиховог ефективног изналажења, интуиционистички су без садржаја, без значења и без вриједности, те као такви су неприхватљиви.

У смислу захтјева за конструктибилношћу, интуиционизам има своје претече нпр. у Кронекеру (L. Kroneckeru) и Поенкареу (H. Poincaréu) (први је рекао да је (само) природне бројеве створио драги Бог, а све остало да је људско дјело (тј. сумњивије вриједности)). Систематски га је почео изграђивати Брауер, а наставили су Хејтинг, Бет и други, најприје холандски, а касније и други математичари.

У интуиционизму нема разликовања теорије и метатеорије, као што смо га упознали у формализму, нпр. при изградњи логике исказа и предиката. Зато овдје и нема смисла говорити посебно о нпр. *алгебри* исказа, а посебно о *логици* исказа.

Уопште, како је већ напоменуто, интуиционистички је нека тврдња *А истинита* онда кад је доказана (бар потенцијално) *ефективном конструкцијом.*

Тврдња *А* (интуиционистички) је неистинита (и тиме интуиционистички тврдња $\neg$ *A per defunutuonet* истинита) онда кад је из претпоставке да има нека ефективна конструкција од *А* такву конструкцију успјело наставити, продужити – опет интуиционистички легитимно – до неке (интуиционистичке) контрадикције, нпр. исказа 0 = 1. Интуиционистичка интерпретација негације разликује се, дакле, битно и од њене класичне, неформализоване (у математици) и од формалистичке интерпретације.

Конјукција $A \wedge B$ интуиционистички је доказана кад су нађени конструктивни докази како за *А* тако и за *В.*

Дисјункција $A \vee B$ интуиционистички је доказана кад је или нађен конструктивни доказ за A, или нађен конструктивни доказ за B. И ту је очигледна дубока разлика према класичном схватању.

Ако је нпр. Ф. Фермаова тврдња класично легитимна, тврдити је $F \vee \neg F$ сигурно истина. Интуиционистички је то (бар засад) неприхватљиво, јер досад нити имамо конструкцију од F, нити претпоставку такве конструкције, јер то доводи до контрадикције. Одатле, нпр., уопштено $A \vee \neg A$ није интуиционистичка «таутологија». (Међутим као што је први показао В. Гливенко, интуиционистичка се логика не може интерпретирати као нека «тровалентна» логика, у којој би за сваки исказ A вриједила трихотомија да је истина *или А, или* $\neg A$, *или* да не наступа ни једно ни друго – супротно мишљењу из једног ранијег рада Барзина (M. Barzina) и Ерера (A. Errerae). Уопштено је касније Гедел показао да се интуиционистичка логика исказа уопште не може адекватно третирати помоћу таблица с коначно много вриједности истинитости).

Импликација $A \Rightarrow B$ интуиционистички је доказана ако је успјело претпостављену конструкцију од A продужити до конструкције од B. Тако је нпр. шема $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ и интуиционистички прихватљива и легитимна (као што је то класично идентички истинита формула), јер, ако конструкцију од A знамо наставити до конструкције од B, а ову знамо наставити до конструкције од C, онда ћемо и првобитну конструкцију од A надовезивањем те двије познате конструкције моћи продужити до конструкције од C. Сличним расуђивањем можемо се увјерити да је нпр. и $(A \Rightarrow B)$ $(\neg B \Rightarrow \neg A)$ интуиционистички легитимно: знамо ли конструкцију од A продужити до конструкције од B и знамо ли још и конструкцију која ону од B води до контрадикције, онда њихово надовезивање даје конструкцију која полазећи од A води до контрадикције, а то је доказ од $\neg A$. Такође, $A \Rightarrow \neg \neg A$ вриједи и интуиционистички. Кад би наиме постојала конструкција од $\neg A$ и конструкција од A, била би то интуиционистичка контрадикција, па је $\neg A$ оборено полазећи од A, тј. $A \Rightarrow \neg \neg A$

С друге стране $\neg \neg A \Rightarrow A$ интуиционистички *није* легитимно. Ако се претпостављена конструкција од $\neg A$ може наставити до контрадикције, то нам још само по себи не даје могућност конструкције од A. У уобичајеној интуиционистичкој терминологији знамо једино да је «апсурдност од A апсурдна». Затим, као што интуиционистички није легитиман *tertuum non datur* (што смо видјели раније), није интуиционистички легитиман ни наш аксиом логике исказа, наиме шема $(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$. Слично ни класична таутологија $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ није интуиционистички легитимна. Постоје међутим и класичне таутологије које *не* садрже негацију, а ипак су интуиционистички нелегитимне. Таква је нпр. *Пирсеова* таутологија

$((A \Rightarrow B) \Rightarrow A) \Rightarrow A$: Ако се хипотетска конструкција од A може продужити до конструкције од B тако да се та продужена конструкција може даље наставити до конструкције од A, то опет само по себи још не даје конструкцију од A.

Деликатније је питање шеме $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$. Већина је интуициониста прихваћа као легитимну; но има и разлога за супротно схваћање[1], посебно ако се не сматра *а приори* евидентним да је интуиционистичка логика у себи непротивврјечна. Слично вриједи и за шему $\perp \Rightarrow A$. Јакост и слабост интуиционизма је у томе што он *начелно* одбија (и мора одбијати) оштро прецизирање «допуштених» поступака: тиме остаје «жив», «неукрућен» и «неспутан» круто детерминисаним захтјевима, али тиме уједно и отвара могућностима различитих погледа.

За разлику од класичне алгебре и логике исказа, може се доказати да се интуиционистички ни једна од операција $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ не може изразити помоћу осталих.

Дефинишемо ли $A \Leftrightarrow B$ и интуиционистички као $(A \Rightarrow B) \wedge ((B \Rightarrow A)$, видимо по ранијем да интуиционистички шема $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ није легитимна. Интересантно је међутим да је $\neg A \Leftrightarrow \neg\neg\neg A$ легитимно и интуиционистички. (Можда није незанимљиво да нееквивалентност двоструке негације с афирмацијом – иако, дакако, у другачијем смислу него што је овдје – налазимо и у неким старим «нематематичким» логикама, нпр. у логици великог индијског филозофа Нагарјуне (Nâgârjune) око II вијека н.е.).

На нивоу логике предиката, нпр. схеме: $\neg(\exists x)\neg\neg P(x) \Rightarrow (\forall x) P(x)$, $\neg(\forall x)\neg P(x) \Rightarrow (\exists x)P(x)$ интуиционистички нису легитимне; супротне импликације важе и интуиционистички. Такође, и интуиционистички вриједе нпр. схеме $\neg(\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall x)\neg\neg P(x)$, $(\exists x)\neg\neg P(x) \Rightarrow \neg\neg(\exists x)P(x)$; но и ту супротне импликације интуиционистички више не важе – што је за прву од њих доста неочекивано, јер «кореcподентна» шема на нивоу логике исказа, наиме $\neg\neg P \wedge \neg\neg Q \Rightarrow \neg\neg(P \wedge Q)$, вриједи и интуиционистички (за другу кореспондентна схема на нивоу логике исказа, наиме $\neg\neg(P \vee Q) \Rightarrow (\neg\neg P \vee \neg\neg Q)$, интуиционистички не вриједи).

Од «веза» између формалистичке и интуиционистичке логике исказа занимљив је нпр. овај резултат Гливенка: Ако је формула А идентички истинита (дакле $\rceil$A у логици исказа), онда је $\neg\neg$A интуиционистички легитимна шема. Према томе, нпр., и интуиционистички уопште вриједи $\Rightarrow \neg\neg(A \vee \neg A)$, иако ту $A \vee \neg A$ уопште не вриједи.

[1] Дакако, слабија шема $A \Rightarrow$ (k $A \Rightarrow$ B) евидентно је интуистионистички легитимна

Систематска изградња интуиционистичке логике и појединих грана математике (које се онда редовно врло радикално разликују од одговарајуће класичне или формалистички аксиоматизоване теорије) често је веома тешка.

За илустрацију разлика између једне гране класичне математике и њене интуиционистичке реконструкције скицирајмо – у најгрубљим цртама – прве почетке изградње интуиционистичке теорије реалних бројева.

Низ $(a_n)= a_1, a_2, a_3, \dots$ рационалних бројева зове се (интуиционистичким) (*Кошијевим) низом* ако се за сваки природни број *k може* (у начелу) *ефективно одредити* природни број *n = n(k)*, тако да буде

$\left|a_{n+p} - a_n\right| < 1/k$ за било који («сваки») природни број *p*.

Нпр. (2^{-n}) је Кошијев низ. Друкчије (данас) не можемо рећи да је Кошијев низ (b_n) дефинисан овако: ако у децималном развоју броја π међу првих 2^n децимала долази по први пут бар на једном мјесту, низ од n^2 сукцесивнх 0, онда је $b_n=1$, а иначе је $b^n=2^{-n}$. Дакако, *класично* и ово *јест* Кошијев низ, јер се од низа (2^{-n}) разликује у највише једном члану; но интуиционистички *није* док не знамо *постоји ли* такав члан, јер не знамо за било који (произвољни) *k* одредити број *n(k)*.

Кошијев низ се зове «генератор (реалног) броја». Два таква низа (a_n), (b_n) зову се *идентичним* ако је $a_n = b_n$ за сваки *n*; тада пишемо $(a_n) \equiv (b_n)$. Два генератора броја (a_n), (b_n) зову се *коинцидентним* ако се за сваки природни број *k* може (у начелу) ефективно наћи природни број *n(k)*, тако да је $\left|a_{n+p} - b_{n+p}\right| < 1/k$ за сваки природни број *p;* тада пишемо $(a_n) = (b_n)$.

Ако $(a_n) = (b_n)$ (интуиционистички легитимно) води до контрадикције, пишемо $(a_n) \neq (b_n)$.

Може се доказати (интуиционистички нипошто тривијална!) теорема да, у случају да $(a_n) \neq (b_n)$, води до контрадикције, $(a_n) = (b_n)$. У том *посебном случају,* дакле, и *интуиционистичка* двострука негација значи *исто* што и афирмација!

За два генератора броја (a_n), (b_n) каже се да су *одвојени* и пише $(a_n) \# (b_n)$ ако се могу (у начелу) ефективно одредити природни бројеви *n* и *k*, тако да је $\left|a_{n+p} - b_{n+p}\right| > 1/k$ за сваки природни број *p*. $(a_n) \# (b_n)$ интуиционистички легитимно повлачи $(a_n) \neq (b_n)$, но може се доказати да обрнуто *не важи*. Већ се, дакле, ту интуиционистички појам реалног броја *битно* разликује од класичног (гдје би се одговарајуће релације $\neq$, # поклапале). Али може се доказати да је и, ако $(a_n) \# (b_n)$ (интуиционистички легитимно) води до контрадикције, $(a_n) = (b_n)$: То је *јачи* резултат од раније споменутог. Могу се такође доказати нпр. ове теореме: Ако је (a_n) # (b_n), $(a_n) = (a_n')$, $(b_n) = (b_n')$, онда је (a_n') # (b_n'). Ако је (a_n) # (b_n) и (c_n) било који генератор броја, онда је (интуиционистички легитимно) *или* (a_n) # (c_n) *било* (b_n) # (c_n).

За генераторе бројева могу се на природан начин увести операције +, –, ·, : па се показује да су за дате генераторе броја (a_n), (b_n) и $(a_n) + (b_n)$, $(a_n) - (b_n)$, $(a_n) \cdot (b_n)$ генератори броја; уз (a_n) # 0 и $(1/a_n)$ је генератор броја. (Уочи да ту $(a_n) \neq 0$ интуиционистички још *не* оправдава да би и $(1/a_n)$ био генератор броја!).

Релација је коинциденције међу генераторима бројева (интуиционистички легитимно) рефлексивна, симетрична и транзитивна; одатле се «класа међусобно коинцидентних» генератора бројева може сматрати «интуиционистичком верзијом» или «интуиционистичким панданом» класичног појма реалног броја – у тачнију дискусију тог односа не можемо улазити, јер би она захтијевала познавање основа интуиционистичке верзије теорије скупова.

k k $((a_n) = (b_n)) \Rightarrow ((a_n) = (b_n))$.

Даље се нпр. показује да уз $(a_n) = (a_n')$, $(b_n) = (b_n')$ вриједи $(a_n) + (b_n) = (a_n') + (b_n')$, $(a_n) - (b_n) = (a_n') - (b_n')$, $(a_n) \cdot (b_n) = (a_n') \cdot (b_n')$; да (a_n) # (b_n) повлачи $(a_n) + (c_n)$ # $(b_n) + (c_n)$ за сваки (c_n); да (a_n) # 0 и (b_n) # 0 повлачи $(a_n) \cdot (b_n)$ # 0; да $(a_n) \cdot (b_n)$ # 0 повлачи (и интуиционистички легитимно) да је (a_n) # 0 и (b_n) # 0; да $(a_n) + (b_n)$ # 0 повлачи да је *или* (a_n) # 0, *или* (b_n) # 0 итд.

Иако је већина пионира интуиционизма – нпр. Брауер, Бет, Грис – данас већ мртва, интуиционизам у математици нипошто није са њима умро (као што су то неки очекивали или прижељкивали). Он остаје једним од најдубљих и најинтересантнијих подручја математичке и логичке мисли, који се и даље бујно развија и грана и доноси плодове трајне вриједности. Поред тога, интуиционистичка је математика, иако често начелно битно другачијих схватања од (класичних) теорија о конструктибилном, знатно придонијела развоју тих теорија. Њено се значење за филозофију математике уопште не може прецијенити и начелно је питање («интимног») опредјељења за класичну, односно формалистички аксиоматизирану, или за интуиционистичку математику, а вјероватно ће још дуго остати дубока дилема за сваког математичара који се бави основама своје науке и који себи не жели допустити да олако пређе преко критичних питања «живота и смрти» те науке или да, по једној метафори Ландоа (Ortensio Lando), дошавши до високог зида, наставља ходати с његове друге стране.

Већ је раније било споменуто да унутар самих интуициониста не постоји потпуна подударност у схватањима. Посебно су такве разлике довеле и до тзв. „*ултраинтуиционистичких*” теорија, нпр. Г. Ф. Ц. Грисове *математике без негације* и А. С. Јесењин–Вољпинов[10] *математике с недостижно великим*[11] (у класичном, па и у „ортодоксно" интуиционистичком смислу коначним) *природним бројевима.* И Јохансонова (Johanssonova) тзв. *минимална логика* може се сматрати ултраинтуиционистичком теоријом. (Не само класичном већ и „ортодоксно" интуиционистичком математичару „дићи ће се коса на глави" ако прочита нпр, Јесењин–Вољпинов чланак од четрдесетак страница о његовој ултраинтуиционистичкој критици и антитрадиционалном програму заснивања математике (у зборнику радова *Intuitionism and Proof Theory,* Amsterdam 1970), наручен као порука при отварању Конференције о интуиционизму и теорији доказа (формализму) у Буфалу 1968. Па ипак, може бити да ће тај и такви радови једном у некој будућој, „новој математици", заузети онакво пионирско историјско мјесто као што су то за данашњу математичку логику заузели радови Фрегеа (G. Fregea), Расела и Хилберта на прелазу из XIX у XX вијек).

Постоје и математичке логике које се релативно према (класичној двовалентној) формалистичкој *преклапају* с интуиционистичком; нпр. таква у којој *tertuum non datur* $A \Rightarrow A$ *јест* легитиман (иако то интуиционистички није), док нпр. интуиционистички прихваћена схема $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ у тој теорији није прихватљива.

КОНСТРУКТИВНА ЛОГИКА

Интуиционистичка критика класичне математике и Хилбертовог програма њене формализације није била једини разлог развоја математичких *теорија о конструктибилном.* Оне су, поред тога, требале и самој Хилбертовој математици, посебно нпр. испитивањима у вези с питањима потпуности, доказивости, одлучивости и сл. у формалним теоријама. Надаље, оне су се убрзо развиле и стекле самосталан интерес, а и непроцјењиву примјену, нпр. у теорији аутромата и у кибернетици уопште.

За разлику од интуиционизма као консртуктивне теорије, те теорије о конструктибилном полазе од прихватања и неконструктибилних објеката као „егзистенцијално" постојећих, из „резервоара" којих се онда у одређени дефиницијама и методама „одвајају" они међу њима који су конструктибилни у смислу дате теорије. Ако се схвате и развијају на тај начин, дакако, ни теорије о конструктибилном нису у потпуности интуиционистички прихватљиве, но ипак су овом гледању на математику и ближе од класичне математике, а и дужне су му много тога и у методама којима се служе и у многим од резултата од којих долазе. У сваком случају, Е. Пост имао је право кад је у тим теоријама и у сазнањима до којих су довеле видио један од исто тако дубоких и фундаменталних основа математике уопште, као што су то и природни бројеви.

Већина математичара који се баве тим гранама математике истичу неочекивано слагање по облику тих, по полазним концепцијама, наоко врло различитих теорија (Турингових машина, рекурзивних функција, Марковљевих алгоритама, Черчових λ-конверзија итд.). Наиме, показује се да су све те теорије „еквивалентне" у смислу да је неки математички објект, посебно нпр. нека функција дефинисана на скупу природних бројева или неком његовом подскупу и са вриједностима у скупу природних бројева – конструктибилан у смислу једне од тих теорија онда и само онда ако је конструктибилан у смислу друге теорије.

Нема сумње да то подударање показује да је дефиницијама теорија о конструктибилном којима је из „резервоара" у класичном смислу „постојећих" математичких објеката издвојен један подскуп (начелно) ефективно конструктибилних заиста захваћен један од фундаменталних појмова математике, или, можда би било боље рећи, људских могућности математичког мишљења и закључивања. Друго је питање у којој је мјери та чињеница (уз низ других) дефинитивно сигуран ослонац тзв. Черчове тезе, по којој је нпр. свака интуитивно израчунљива функција (поменутог типа) израчунљива (тј. конструктибилна) и у смислу поменутих теорија (и обратно). Начелно би, наравно, један једини ефективни „противпримјер" интуитивно (у начелу ефективно) израчунљиве функције која не би била конструктибилна у смислу поменутих теорија био довољан да Черчову тезу дефинитивно обори, док, с друге стране, нема могућности да се она "докаже". Иако већина математичара (који се тим подручјима баве) „интимно" вјерује у Чаркову тезу, то вјеровање, строго узевши, заиста није више и друго до вјеровање, колико год за њ „постојали јаки разлози". Уосталом, има доста радова прворазредних математичара-логичара (нпр. Калмара (L. Kalmåra), Р. Петерове, да и не помињемо опет А. С. Јесењин-Вољпинова) по којима Черчова теза није прихватљива или бар није спорна.

Међутим, с интуиционистичког гледишта, Черчова теза уопште нема онај смисао који јој придаје „класични" или формалистички математичар. Чини се, надаље, да је – бар класично расуђујући – Черчова теза инкомпатибилна с претпоставком да је сваки индивидуални, конкретни математички проблем рјешив; и ако то, дакако, не само да не мора бити аргумент само у прилог дискутабилности Черчове тезе нити у прилог само индискутабилности схватања да сваки индивидуални математички проблем мора начелно бири рјешив, „вјероватније" је да нити је спорна Черчова теза нити сваки (смислено формулисани) индивидуални математички проблем мора бити рјешив. Могуће је да ћемо једног дана о свим тим питањима знати битно више неголи данас, а могуће је и да нећемо, него да ћемо, напротив, уочити још више исто тако битних питања за математику – и за научну мисао уопште – на која нећемо знати одговора. Чињеници да неког конкретног или математичког проблема за који би било доказано да је у неком „апсолутном" смислу нерјешив засад нема (као што нема протупримјера Черчовој тези), неки ће дати већу а неки мању тежину, но дефинитивно она вјероватно не значи битно више неголи што је својевремено значила чињеница да у старом Египту врло вјероватно нису знали за ирационалне бројеве нити у старој Индији за нееуклидске геометрије (у старој Грчкој, насупрот раширеном мишљењу, чини се да је већ Аристотел за њих знао!)

Под „интуитивно израчунљивом" функцијом (с подручјем дефиниције и подручјем вриједности у скупу природних бројева укључиво нуле) подразумијева се таква функција вриједност које се за било који дати аргумент може ефективно израчунати у коначно много (макар и врло великом броју) корака. Слично је за функцију n аргумента. Аналогно се под "интуитивном одлучивошћу" неког n-мјесног предикта над универзумом природних бројева (опет укључиво 0) подразумијева да је за сваку дату уређену n-торку његових аргумената у коначно много корака могуће „израчунати", тј. одлучити је ли одговарајућа вриједност истинитости тога предикта $\top$ или $\perp$. Тако скициране „дефиниције" интуитивне израчунљивости и одлучивости, дакако, не могу бити стриктно математички задовољавајуће, јер нпр. није сасвим јасно шта значи „израчунати у коначно много корака": како, каквим средствима, у коме смислу „израчунати"? Зато се и изграђују теорије о конструктибилном, које треба да те интуитивне, непрецизне дефиниције замијене оштрим и прецизним. Но, ту је већ уједно и коријен „источног гријеха" тога поступка – само *прецизирање* једног интуитивног, непрецизног појма *ео упсо* јесте нешто друго неголи тај непрецизни појам. „Оптимистичко" вјеровање да је то прецизирање управо савршено онаквог домета као полазни непрецизни интуитивни појам (што управо и тврди Черчова теза) мора зато обавезно остати (не у неком пежоративном смислу, већ у смислу „здраве скепсе") бар до неке мјере проблематичним.

УМЈЕСТО ЗАКЉУЧКА

Савремена математичка логика је наука чији су предмет изучавања математички докази. Објекти испитивања математичке логике су искази с којима се врше операције аналогне операцијама с бројевима у алгебри. Математичка логика се понекад назива метаматематика. Као таква, математичка логика, заснована на доказима и операцијама са исказима, нашла је примјену и у теорији електронских математичких машина (рачунара).

Међутим, можда је данас једини филозофско-методолошки проблем, због кога постоји раздор међу математичарима, управо питање односа и схватања егзистенције математичких објеката. Управо, сви су математичари без изузетка сагласни у томе да су алгоритми или конструктивне процедуре од велике важности. Најопштије алгоритме можемо дефинисати у терминима, нпр., рекурзивних функција, као и других аналогних конструктивних објеката. Тиме је развој савремене математичке логике у новије вријеме омогућио да се изгради конструктивни правац у математици, који се нагло конституисао као теорија, а има тенденцију да се конституише у сасвим нову математику – конструктивну математику.

Из принципа такве конструктивне математике изградила би се као посебна дисциплина – конструктивна логика. Конструктивној логици не би био предмет изучавања (у првом плану) доказ, нити би јој објекти испитивања били искази и њихове логичке операције. Конструктивна логика би се ограничила на истраживање конструктивних објеката чију би егзистенцију сматрали доказаном (утврђеном) ако и само ако се пронађе метод потенцијално остварљиве изградње (конструкције) тих објеката. А тај метод изградње конструктивних објеката био би алгоритамски.

Дакле, предмет изучавања конструктивне логике би био конструктивни објект, уопште, и конструктивно тумачење његове егзистенције. Конструктивна логика би се руководила појмовима потенцијално остварљиве бесконачности и интуицијом као мјерило објективне истине. Треба нагласити да конструктивна логика не би била сводљива на интуиционистичку логику, иако би прихватила нека њена становишта. У сваком случају, конструктивна логика би одбацила идеалистичко поимање «прапочетне интуиције» која би се подударала са интуицијом, што се темељи на вјеровању о «божанској реалности». Начела конструктивне логике омогућују конструктивној математици да раздвоји њене објекте (конструктивне објекте) од њених метода (алгоритама).

Ако би овај рад верификовао конституисање конструктивне математике и конструктивне логике, онда би развој формализованих средстава научног истраживања кроз историју људске мисли могли приказати (проширити) на сљедећи начин:

аритметика и дохеленска геометрија	еуклидова геометрија, анализа	савремена аксиоматска математика	нова конструктивна математика
→ природни језик →			
античка логика	средњовјековна логика	савремена математичка логика	нова конструктивна логика

Схема показује да све формализације користе константно природни језик. Осим тога, сваку егзактну (математичку) формализацију прати упоредо математичка логика на оном степену на коме се и та формализација развила. Тако би развој и конструктивне математике упоредо пратио развој одговарајуће конструктивне логике. Из развоја једне услиједио је и развој друге дисциплине. То је и научно оправдано, јер се показало да су све те логике представљале широке мостове који су повезивали међусобно најудаљенија подручја и најапстрактнијих математичких грана са онима које се најнепосредније надовезују на потребе науке и технике. Тако би и конструктивну логику могли сматрати једном од најапстрактнијих дисциплина конструктивне математике, и у неку руку би је третирали као грану примијењене конструктивне математике.

Коначно би ваљало истаћи шта је до сада (у свијету) постигнуто у развоју ове нове дисциплине. Конструктивна логика би могла имати и ове садржаје:

– Конструктивни објект (КО) и конструктивно тумачење егзистенције (постојања).
– Марковљев принцип (МП) и главне црте конструктивизма.
– Поузданост закључивања и схватања као увјерљивост.
– Поузданост закључивања и схватања као сличност (еквивалантност) с посматраним стварима.
– Језик конструктивне математике.
– Хеуристика, интуиција, алгоритам, итд.

Појам конструктивног објекта се не може прецизирати све док се не објасни појам неконструктивности. Марковљев принцип називају још и Лењинградски принцип и без њега се не би могли добити неки битни резултати конструктивне математике и конструктивне логике. Термин „поузданост" је стално присутан и актуелан у свакој математици. У „класичној" математици поузданост остварујемо кроз асиоматску методу, а код конструктивне математике и логике поуздaности ослањамо на увјерљивост, на увјеравању, односно на тезама попут Черчове тезе која у основи почива на методи моделовања. Језик конструктивне математике није језик теорије скупова већ се ослања на програмирање. Конструктивна хеуристика се ослања на интуицију, алгоритам и потенцијалну остварљивост бесконачности. Тако је конструктивна логика тек у развоју, упоредо са конструктивном математиком, које још у свјетској литератури нису стекле статус науке, већ правца или теорије.

ЛИТЕРАТУРА

Александер: *Принципи математике*, ИП „Вук Караџић»,Београд, 1963.

Devide V., *Matematička logika* (Prvi dio: Klasična logika sudova), Beograd, 1964.

E. Mendelson, *Introduction to Mathematical Logic*, D. van Nostrand, Princeton N.J. 1964 (postoji i ruski prevod).

Калужнин Л. А., *Што је математичка логика*, Школска књига, Загреб. 1975.

Клини С., *Математическаја логика,* Мир, Москва, 1973.

J. B. Rosser, *Logic for Mathenaticians*, New York 1953.

N. Prijatelj, *Uvod v matematičko logiko*, Mladinska knjiga, Ljubljana, 1969.

Прешић, : Славиша Б. *Елементи математичке логике*, Завод за издавање уџбеника СР Србије, Београд, 1972 .

S. C: Kleene, *Mathematical Logic*, J. Wiley & Sons, New York, 1967 (postoji i ruski prievod).

S. C. Kleene*, Introduction to Metamathematics*, Amsterdam 1952.

P. S. Novikov, *Elementy matematičeskoj logiki*, New Jork 1953.

A. Heyting, *Intuitionism*, Amsterdam 1956.

E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1959.

V. A. Unspenskij, *Lekcii po vyčislimyh funkcijah*, Moskva 1965.

Трахтенброт Б. А., *Конструктивни процеси у математици*, Загреб 1965.

PhD Radoslav Milosevic
Department of Mathematics and Computer Science
Faculty of Pale
University of East Sarajevo

Summary

Formal logic is sometimes called metamathematics, and it refers to the modern mathematical logic. In addition to the classical mathematical logic, a series of new formal logic have developed. The Hilbert problems caused development of new mathematical theories. Thus, the development of new mathematic offered several reconstruction programs in mathematics and logical reasoning in general. Particularly interesting are the directions, such as Russell's logicism, Hilbert formalism, intuitionism Brauer's and Markovlev's constructivism. Based on these programs, new formal logic appered, among which stand out polyvalent intuitionistic and constructivist logic which will be the subject of this paper.